14. III. 1988

ČESKOSLOVENSKÁ SOCIALISTICKÁ REPUBLIKA
(19)

ÚŘAD PRO VYNÁLEZY A OBJEVY

POPIS OBJEVU K DIPLOMU

36

Přihlášeno 27 07 79 (PO 48-79)
Právo přednosti od 27 07 79

Zveřejněno: Geodetický a kartografický obzor 8/1983

Uděleno: 19 03 87
Vydáno: 14 08 87

MDT 528.2

Autoři objevu: BURŠA MILAN, člen korespondent ČSAV,
ŠÍMA ZDISLAV, RNDr. CSc., PRAHA

Název objevu: **Vztah mezi průchodem rotační osy těžištěm nebeského tělesa a posicemi jeho stacionárních družic**

Předmět objevu:

Zákonitost, spočívající ve vztahu mezi průchodem rotační osy těžištěm nebeského tělesa a pozicemi jeho libračních bodů čili pozicemi jeho stacionárních družic, definované rovnicí

$$\frac{GM}{\varrho'} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_o}{\varrho'}\right)^n \sum_{k=1}^{n} k \left[\left(S_n^{(k)}\right)' \cos k\Lambda' - \left(J_n^{(k)}\right)' \sin k\Lambda' \right] P_n^{(k)} (\sin \Phi') -$$

$$- \omega^2 \varrho' (y_o'' \cos \Lambda' - x_o'' \sin \Lambda') P_1^{(1)} (\sin \Phi') = 0,$$

v němž znamená

GM	centrickou gravitační konstantu nebeského tělesa,
ϱ'	průvodič libračního bodu,
Φ'	planetocentrickou šířku libračního bodu,
Λ'	planetocentrickou délku libračního bodu, přičemž kladná je na východ,
$\left(J_n^{(k)}\right)'$ a $\left(S_n^{(k)}\right)'$	harmonické koeficienty, to znamená Stokesovy konstanty v obvyklé definici, odpovídající nebeskému tělesu,
$P_n^{(k)}$	Legendrovy funkce stupně n a řádu k,
a_o	střední rovníkový poloměr nebeského tělesa,
ω	úhlovou rychlost rotace nebeského tělesa,
x_o'', y_o''	pravoúhlé souřadnice počátku odstředivého potenciálu, tj. rotační osy soustavy nebeské těleso-družice v těžišťovém systému nebeského tělesa.

Objev se týká matematického vyjádření vztahu mezi průchodem rotační osy těžištěm nebeského tělesa a pozicemi jeho libračních bodů čili pozicemi jeho stacionárních družic. Objevem

je tedy vyřešení vědeckého problému vztahu mezi počátkem potenciálu odstředivé síly, to znamená mezi okamžitou rotační osou a těžištěm nebeského tělesa, které se promítá do pozic jeho libračních bodů. V případě, že počátek potenciálu odstředivé síly, tedy rotační osa, neprochází těžištěm nebeského tělesa, například Země, tvar tíhového potenciálu se změní. Tato změna tíhového potenciálu je ve většině případů sotva měřitelná, ale v případě stacionárních družic se projeví velmi silně. Vlivem toho lze tedy využít volných stacionárních družic jako velmi citlivých indikátorů změn mezi počátkem potenciálu odstředivé síly a těžištěm nebeského tělesa.

Dosavadní bádání probíhalo následovně: možnost geodynamického studia Země jako celku se prakticky otevřela až vypuštěním prvních umělých družic Země. Avšak ještě předtím, v roce 1951, byla A.C. Clarkem v knize "The Exploration of Space", Kings-port Press, Inc., Tennesse, 1951 [1], předpověděna existence geostacionárních družic a možnost jejich využití. Ale teprve rozvoj technických možností a vypuštění první stacionární družice vyvolalo základní práce z nebeské mechaniky o pohybu těchto těles; je to např. publikace R.R. Allan, Proceedings of the Royal Society A 288, 1965, str. 60 [2]. Později však nastává jistý pokles počtu prací v tomto oboru a ožívá až poslední dobou, což je vyvoláno jednak problémy kosmického práva, které dobře shrnul L. Perek ve "Physics, Uses and Regulation of the Geostationary Orbit, or, Ex FACTO SEGUITUR LEX", 20th Coloq. IAF 1977, Prague [3], - jednak pokročilejší teorií pohybu stacionárních družic spolu s lepšími možnostmi jejich sledování, jak je popsáno v publikaci M. Šidlichovského v "Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia 30 (1979), str. 41 [4]".

Velký vliv zakázané harmonické konstanty $J_{1,1}$ na pohyb stacionární družice byl poprvé ukázán v práci "Geostationary Satellites and the Position of the Earth´s Mass Center" přihlašovatelů tohoto objevu, publikované v Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia 29 (1978), str. 232 [5]. Problém je krátce shrnut také v práci "Geostationary Satellites and Variations in the Position of the Earth´s Mass Center" týchž autorů, publikované v časopise Studia geophysica et geodaetica 23 (1979), str. 6 [6].

Vlivem zakázané konstanty $J_{1,1}$ na pohyb družice se podle znalostí autorů nezabývala žádná z prací, jež jim byla přístupná. Problematiku, kterou se zabývá předložený objev, lze stručně vyjádřit následovně: v případě netotožnosti počátku odstředivého potenciálu, tj. rotační osy nebeského tělesa s počátkem gravitačního potenciálu, tj. s těžištěm nebeského tělesa, je poloha libračního bodu na stacionární dráze definována vztahem

$$\frac{GM}{\varrho'} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_o}{\varrho'}\right)^n \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(S_n^{(k)}\right)' \cos k\Lambda' - \left(J_n^{(k)}\right)' \sin k\Lambda'\right] x$$

$$x\, P_n^{(k)} (\sin\Phi') - \omega^2\varrho' (y_o'' \cos\Lambda' - x_o'' \sin\Lambda')\, P^{(1)} (\sin\Phi') = 0,$$

v němž znamená

GM	centrickou gravitační konstantu nebeského tělesa,
ϱ'	průvodič libračního bodu,
Φ'	planetocentrickou šířku libračního bodu,
Λ'	planetocentrickou délku libračního bodu, přičemž kladná je na východ,
$\left(J_n^{(k)}\right)'$ a $\left(S_n^{(k)}\right)'$	harmonické koeficienty, to znamená Stokesovy konstanty v obvyklé definici, odpovídající nebeskému tělesu,
$P_n^{(k)}$	Legendrovy funkce stupně n a řádu k,
a_o	střední rovníkový poloměr nebeského tělesa,
ω	úhlovou rychlost rotace nebeského tělesa,
x_o'', y_o''	pravoúhlé souřadnice počátku odstředivého potenciálu, tj. rotační osy soustavy nebeské těleso-družice v těžišťovém systému nebeského tělesa.

V dalším je uvedeno obecné odvození, z něhož vyplývá fyzikální pozadí jevu. Nejprve je odvozen obecný tíhový potenciál.

Žádným měřením se nepodaří ztotožnit zcela přesně používanou soustavu souřadnou dále nazývanou kvasicentrickou, s ideální centrickou soustavou $O(x, y, z) = O(\varrho, \phi, \Lambda)$, jejíž osy splývají s osami elipsoidu setrvačnosti nebeského tělesa a jejíž počátek splývá s jeho těžištěm. Nechť je kvasicentrická soustava $O'(x', y', z') = O'(\varrho', \phi', \Lambda')$ natolik blízká centrické soustavě, že čtverce vzdáleností OO' mohou být v dalším zanedbány. Obecný tvar gravitačního potenciálu v kvasicentrické soustavě zní:

$$(1)\qquad V(\varrho', \phi', \Lambda') = \frac{GM}{\varrho'}\left\{1 + \frac{a_o}{\varrho'}\left[(J_1^{(o)})' P_1^{(o)}(\sin\phi') + (J_1^{(1)})' \cos\Lambda' + (S_1^{(1)})' \sin\Lambda')\, P_1^{(1)}(\sin\phi')\right] + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_o}{\varrho'}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\left[(J_n^{(k)})' \cos k\Lambda' + (S_n^{(k)})' \sin k\Lambda'\right] P_n^{(k)}(\sin\phi')\right\},$$

kde ϱ' je průvodič bodu, ϕ' jeho šířka, Λ' jeho délka (kladná na východ), GM geocentrická gravitační konstanta; $(J_n^{(k)})'$, $(S_n^{(k)})'$, harmonické koeficienty (Stokesovy konstanty) v obvyklé definici; $P_n^{(k)}$ Legendreovy funkce stupně n a řádu k; a_o střední rovníkový poloměr nebeského tělesa. Harmonické konstanty n=1, k=o a n=1, k=1 vyjadřují polohu počátku O, čili těžiště, vzhledem k počátku O'. Dále zde vystupuje třetí systém $O''(x'', y'', z'') \equiv O''(\varrho'', \phi'', \Lambda'')$ tak, aby jeho osa z'' splývala s počátkem odstředivého potenciálu nebeského tělesa, to znamená s rotační osou, a osy x'', y'' byly blízké osám x, y. Protože také osy soustavy kvasicentrické jsou blízké osám centrické soustavy, lze v dalším zanedbávat čtverce a součiny úhlů $(x'', x')^2$, $(x'', x)^2$, $(x', x)^2$, (x'', x'), (y'', y'), ... atd.

Jestliže ω je okamžitá úhlová rychlost rotace nebeského tělesa, pak třetí systém $O''(x'', y'', z'')$ byl zvolen tak, že potenciál odstředivých sil je definován vztahem

$$(2)\qquad Q(x'', y'', z'') = \frac{1}{2}\omega^2(x''^2 + y''^2).$$

Aby bylo možno potenciály (1) a (2) sečíst - získá se tím potenciál tíhový - musí být oba potenciály vyjádřeny ve stejné soustavě souřadné. Transformujme proto potenciál (2) do soustavy kvasicentrické, v níž je vyjádřen potenciál (1). Vzájemná transformace mezi $O'(x', y', z')$ a $O(x, y, z)$ je dána vztahem

$$(3)\qquad r = r_o + \tau'\varepsilon'\chi' r' ,$$

kde r a r' jsou polohové vektory vyjádřené ve složkách jejich vlastních systémů, r_o je polohový vektor bodu O' v centrickém systému. Úhly natočení os jsou definovány vztahy

$$(4)\qquad \tau' = \begin{Vmatrix} \cos\tau' & 0 & -\sin\tau' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\tau' & 0 & \cos\tau' \end{Vmatrix};\quad \varepsilon' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon' & \sin\varepsilon' \\ 0 & -\sin\varepsilon' & \cos\varepsilon' \end{Vmatrix};$$

$$\chi' = \begin{Vmatrix} \cos\chi' & \sin\chi' & 0 \\ -\sin\chi' & \cos\chi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Transformace mezi soustavou $O(x, y, z)$ a $O''(x'', y'', z'')$ je formálně analogická:

(5) $$r = r_{o''} + \tau'' \, \varepsilon'' \, \chi'' \, r''$$

takže výsledná transformace je

(6) $$r'' = r_{o'} - r_{o''} + (\tau' - \tau'')(\varepsilon' - \varepsilon'')(\chi' - \chi'') \, r' \, .$$

Protože všechny úhly byly malé, stačí lineární přiblížení a výsledná matice transformace nezávisí na pořadí složení úhlů:

(7) $$(\tau' - \tau'')(\varepsilon' - \varepsilon'')(\chi' - \chi'') = \begin{Vmatrix} 1 & \chi' - \chi'' & -(\tau' - \tau'') \\ -(\chi' - \chi'') & 1 & \varepsilon' - \varepsilon'' \\ \tau' - \tau'' & -(\varepsilon' - \varepsilon'') & 1 \end{Vmatrix}$$

a potřebná transformace souřadnic je:

(8) $$\begin{aligned} x'' &= x' + (x_{o'} - x_{o''}) + (\chi' - \chi'') \, y' - (\tau' - \tau'') \, z' \\ y'' &= y' + (y_{o'} - y_{o''}) + (\chi' - \chi'') \, x' + (\varepsilon' - \varepsilon'') \, z' \end{aligned}$$

Pokud se zanedbají členy typu $(x_{o'} - x_{o''})(\chi' - \chi'')$, dostane se potenciál odstředivých sil takto:

(9) $$Q(x', y', z') = \frac{1}{2}\omega^2 (x'^2 + y'^2) + \omega^2 \left[x' (x_{o'} - x_{o''}) + \right.$$

$$\left. + y' (y_{o'} - y_{o''}) - x' z' (\tau' - \tau'') + y' z' (\varepsilon' - \varepsilon'') \right] ,$$

což ve sférických souřadnicích jest:

(10) $$Q(\varrho', \varphi', \Lambda') = \frac{1}{2}\omega^2 \varrho'^2 \cos^2 \varphi' + \omega^2 \varrho' \cos \varphi' [(x_{o'} -$$

$$- x_{o''}) \cos \Lambda' + (y_{o'} - y_{o''}) \sin \Lambda'] +$$

$$+ \omega^2 \varrho'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' [(\varepsilon' - \varepsilon'') \sin \Lambda' - (\tau' - \tau'') \cos \Lambda']$$

Nyní již lze oba potenciály sečíst, takže výsledný tíhový potenciál zní:

(11) $$W(\varrho' \varphi' \Lambda') = V(\varrho', \varphi', \Lambda') + Q(\varrho', \varphi', \Lambda') =$$

$$= \frac{GM}{\varrho'} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_o}{\varrho'} \right)^n (J_n^{(o)}), \; P_n^{(o)}(\sin \varphi') + \right.$$

$$+ \left(\frac{a_o}{\varrho'} \right)^2 \left[(J_2^{(2)}), \; \cos 2\Lambda' + (S_2^{(2)}), \; \sin 2\Lambda' \right] P_2^{(2)}(\sin \varphi') +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{a_o}{\varrho'} \right) \sum_{k=1}^{n} \left[(J_n^{(k)})' \cos k\Lambda' + \right.$$

$$\left. \left. + (S_n^{(k)}), \; \sin k\Lambda' \right] P_n^{(k)}(\sin \varphi') \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 \varrho'^2 \cos^2 \varphi' +$$

$$+ W_1^{(1)}(\varrho', \varphi', \Lambda') + W_2^{(1)}(\varrho', \varphi', \Lambda'),$$

kde $W_1^{(1)}(\varrho', \Phi', \Lambda')$ a $W_2^{(1)}(\varrho', \Phi', \Lambda')$ jsou korekce plynoucí z netotožnosti soustav. Korekce $W_2^{(1)}$ souvisí s volnou nutací. Pro reálná tělesa se sice nule nerovná, ale protože závisí lineárně na $P_2^{(1)}(\sin\Phi')$, bude v blízkosti rovníku, kde se předpokládají stacionární družice, zanedbatelná. Korekce $W_1^{(1)}$ vychází takto:

(12)
$$W_1^{(1)}(\varrho', \Phi', \Lambda') = \frac{GM}{\varrho'} \frac{a_o}{\varrho'} \left[(J_1^{(1)})' \cos\Lambda' + (S_1^{(1)})' \sin\Lambda' \right] P_1^{(1)}(\sin\Phi') + \omega^2\varrho' \left[(x_{o'} - x_{o''}) \cos\Lambda' + (y_{o'} - y_{o''}) \sin\Lambda' \right] P_1^{(1)}(\sin\Phi')$$

Z definice harmonických konstant vyplývá

(13)
$$(J_1^{(o)})' = -\frac{z_{o'}}{a_o} \qquad (J_1^{(1)})' = -\frac{x_{o'}}{a_o} \; ; \qquad (S_1^{(1)})' = -\frac{y_{o'}}{a_o} \; ,$$

takže korekci (12) lze přepsat

(14)
$$W_1^{(1)}(\varrho', \Phi', \Lambda') = \left(\omega^2\varrho' - \frac{GM}{\varrho'^2}\right)(x_{o'} \cos\Lambda' + y_{o'} \sin\Lambda') \cdot P_1^{(1)}(\sin\Phi') - \omega^2\varrho'(x_{o''} \cos\Lambda' + y_{o''} \sin\Lambda') P_1^{(1)}(\sin\Phi') =$$
$$= -\frac{GM}{\varrho'}\left\{\left[1 - q\left(\frac{\varrho'}{a_o}\right)^3\right]\left(\frac{x_{o'}}{\varrho'} \cos\Lambda' + \frac{y_{o'}}{\varrho'} \sin\Lambda'\right) + q\left(\frac{\varrho'}{a_o}\right)^3 \left(\frac{x_{o''}}{\varrho'} \cos\Lambda' + \frac{y_{o''}}{\varrho'} \sin\Lambda'\right)\right\} P_1^{(1)}(\sin\Phi'),$$

kde $q = \frac{\omega^2 a_o^3}{GM}$.

Korekční člen $W_1^{(1)}$ se může rovnat nule, jen když

a) $\Phi' = \pm\frac{\pi}{2}$ (nad póly) nebo

b) $x_{o'} = y_{o'} = 0$ a současně $x_{o''} = y_{o''} = 0$ čili v případě, že jak osa z' tak i rotační osa z" procházejí těžištěm. Jestliže však platí podmínka

(15)
$$\omega^2\varrho'^3 = GM \qquad (q\varrho'^3 = a_o^3),$$

první část korekčního členu nabude nulové hodnoty, což znamená, že člen $W_1^{(1)}$ pak nebude záviset na volbě kvasicentrického systému.

Splnění podmínky (15) v případě, že se uvažuje Země jakožto nebeské těleso, tedy když GM = $= 398\,600{,}5 \times 10^9\ m^3\ s^{-2}$, $\omega = 7{,}292\,115\,0 \times 10^{-5}$ rad/s, q = 0,003 461 396, znamená, že ϱ' = = 42 164 175 m, čili že jde o družici stacionární. Člen $W_1^{(1)}$ pak má velmi jednoduchý tvar nezávisle na tom, zda ϱ, Φ, Λ jsou přesně centrické souřadnice:

(16) $$W_1^{(1)}(\rho, \Phi, \Lambda) = -\omega^2 \rho \, (x_{o''} \cos \Lambda + y_{o''} \sin \Lambda) \, P_1^{(1)}(\sin \Phi).$$

Tím je odvozen tíhový potenciál Země, který je v obecné formě dán vzorci (11) a (14). Pro stacionární družici se vztah (14) mění na (16).

V dalším se vyšetřuje poloha libračních, tj. stacionárních bodů v systému pevně svázaném s nebeským tělesem. V nich nesmí působit žádná síla, tj.

(17) $$\frac{\partial W}{\partial S} = 0,$$

kde S je libovolný směr. Pokud bude tíhový potenciál např. derivován podle ρ, dostane se vzdálenost libračního bodu. Dále se sleduje derivace podle délky Λ'. Dostává se tak podmínka

(18) $$\frac{GM}{\rho'} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_o}{\rho'}\right)^n \sum_{k=1}^{n} k \left[(S_n^{(k)})' \cos k\Lambda' - \right.$$

$$\left. - (J_n^{(k)})' \sin k\Lambda' \right] P_n^{(k)}(\sin \Phi') - \omega^2 \rho' (y_{o''} \cos \Lambda' -$$

$$- x_{o''} \sin \Lambda') \, P_1^{(1)}(\sin \Phi') = 0.$$

V případě, že se uvažuje Φ' blízké 0^o, čili stacionární družice v blízkosti rovníku, vymizí v rovnici (18) členy, v nichž (n-k) je liché a v rovnici zůstanou jen členy, v nichž (n-k) je sudé nebo nula.

Rovnice (18) má obecně různý počet řešení pro Λ'. Zde jsou librační body. Je známo, že Země má čtyři librační body - dva stabilní a dva nestabilní, jak vyplývá například z práce S.G. Žuravleva "Astronomičeskij žurnal 54 (1977), str. 909 [7]". Je to způsobeno rovníkovým zploštěním vyjádřeným velkým členem $J_2^{(2)}$, $S_2^{(2)}$. Jak se nyní ukazuje, u ostatních planet sluneční soustavy bude tomu obdobně. Pokud se do rovnice (18) dosadí za $J_n^{(k)}$ Stokesovy (harmonické) konstanty odpovídající Zemi - hlavní vliv mají konstanty s nízkým stupněm n a řádem k, které jsou již dnes známy s přesností dostatečnou pro další úvahu - je možno určovat, o kolik se změní délka libračního bodu, jestliže $x_{o''}$ a $y_{o''}$ budou nenulové. Byl použit model SE II a GEM 6. Zde se ukazuje, že poloha geostacionárního bodu je nesmírně citlivá na to, zda rotační osa Země přesně prochází těžištěm Země (viz [5]). Jestliže těžiště se odchýlí o 1 cm od rotační osy ve směru kolmém na poledník stabilního libračního bodu, změní se Λ tohoto bodu o více než 100" ($\sim$3 km).

Lze předpokládat, že odchýlení družice o šestinásobek této hodnoty už bude dobře měřitelné, čili, že jsou registrovatelné posuvy těžiště Země vůči rotační ose veliké 10^{-8} poloměru Země. Celý jev je vlastně způsoben rezonancí $J_1^{(1)}$, $S_1^{(1)}$ s geostacionární drahou.

V klasické mechanice pro tuhé těleso musí rotační osa přesně procházet jeho těžištěm, takže celý popsaný jev by neměl nastat. Avšak Země jako planeta je těleso komplikované, interagující se svým prostředím. V každém případě se zde naskýtá možnost, jak pomocí geostacionárních družic zjišťovat s nebývalou přesností, zda rotační osa skutečně přesně prochází jejím těžištěm a tím ověřovat, do jaké míry pro ni platí postuláty klasické mechaniky.

Teoretické řešení objevu nebylo a nelze zatím prokázat experimentálními prostředky. Tato skutečnost vyplývá z povahy řešeného problému, jak bylo uvedeno vpředu. Z toho důvodů zatím nelze uvažovat o praktických aplikacích v případě nebeského tělesa Země ani jiných planet.